

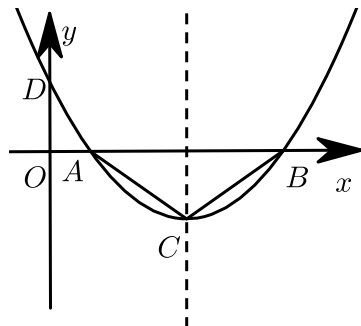
第3讲 二次函数几何最值问题之将军饮马、胡不归 加油站

一、将军饮马问题

练习1

1. ★★★

如图，已知抛物线过点 $D\left(0, \frac{7}{9}\sqrt{3}\right)$ ，且在 x 轴上截得线段 AB 长为 6，若顶点 C 的横坐标为 4。



(1) 求二次函数的解析式。

(2) 在该抛物线的对称轴上找一点 P ，使 $PA + PD$ 最小，求出点 P 的坐标，以及 $PA + PD$ 的最小值。

【答案】 (1) 二次函数的解析式为： $y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x-4)^2 - \sqrt{3}$ 。

(2) $\left(4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ； $\frac{14\sqrt{21}}{9}$ 。

【解析】 (1) 略。

(2) $\because$ 点 A 、 B 关于直线 $x=4$ 对称，

$$\therefore PA = PB,$$

$$\therefore PA + PD = PB + PD \geqslant DB,$$

$\therefore$ 当点 P 在线段 DB 上时 $PA + PD$ 取得最小值，

$$\because B(7, 0), D\left(0, \frac{7}{9}\sqrt{3}\right),$$

$$\therefore l_{BD}: y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x + \frac{7\sqrt{3}}{9},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

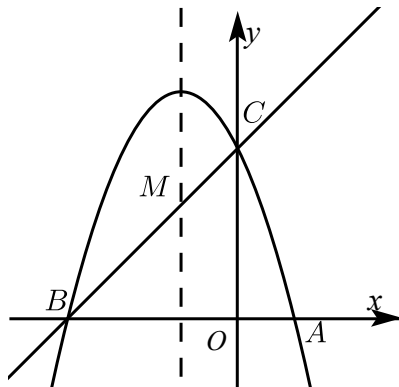
$$PA + PD \text{ 最小值即为 } BD \text{ 的长度, } \frac{14\sqrt{21}}{9}.$$

$$\text{故答案为: } \left(4, \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \frac{14\sqrt{21}}{9}.$$

【标注】【知识点】线段和的最小值

2. 2016年广东汕头龙湖区初三中考一模第23题9分 ★★★

如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的对称轴为直线 $x = -1$ ，且抛物线经过 $A(1, 0)$ ， $C(0, 3)$ 两点，与 x 轴交于点 B 。



- (1) 若直线 $y = mx + n$ 经过 B 、 C 两点，求直线 BC 和抛物线的解析式。
- (2) 在抛物线的对称轴 $x = -1$ 上找一点 M ，使点 M 到点 A 的距离与到点 C 的距离之和最小，求出点 M 的坐标。

【答案】(1) 直线 BC 的解析式为 $y = x + 3$ ，抛物线解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$ 。

(2) M 的坐标为 $(-1, 2)$ 。

【解析】(1) 若直线 $y = mx + n$ 经过 B 、 C 两点，求直线 BC 和抛物线的解析式；

$$\text{依题意得：} \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ a + b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$ 。

$\therefore$ 对称轴为 $x = -1$ ，且抛物线经过 $A(1, 0)$ ，

$\therefore$ 把 $B(-3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 分别代入直线 $y = mx + n$ ，

$$\text{得} \begin{cases} -3m + n = 0 \\ n = 3 \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 $y = mx + n$ 的解析式为 $y = x + 3$ 。

(2) 设直线 BC 与对称轴 $x = -1$ 的交点 M ，则此时 $MA + MC$ 的值最小，

把 $x = -1$ 代入直线 $y = x + 3$ 得， $y = 2$ ，

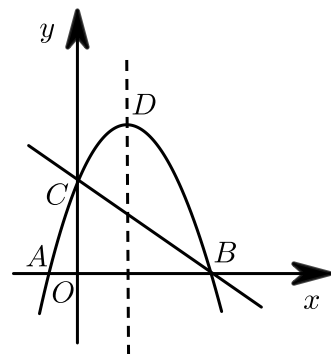
$\therefore M(-1, 2)$ ，

即当点 M 到点 A 的距离与到点 C 的距离之和最小时 M 的坐标为 $(-1, 2)$ 。

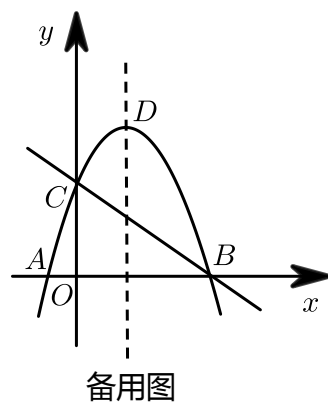
【标注】【知识点】线段和的最小值

3. 2019~2020学年浙江绍兴柯桥区初三上学期期末第23题12分 ★★★★★

如图，直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 B 、 C 两点，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 B 、 C 两点，与 x 轴另一交点为 A ，顶点为 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在 x 轴上找一点 E ，使 $\triangle EDC$ 的周长最小，求符合条件的 E 点坐标。
- (3) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 P ，使得 $\angle APB = \angle OCB$ ？若存在，求出 BP^2 的值；若不存在，请说明理由。



【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$ 。

(2) $E\left(\frac{3}{7}, 0\right)$

(3) 存在 P ，此时 $BP^2 = 16 + 8\sqrt{2}$ 。

【解析】 (1) 由题可知：

$$y = -x + 3 \text{ 过 } B, C,$$

$$\therefore B(3, 0), C(0, 3),$$

$$\text{将 } B(3, 0), C(0, 3) \text{ 代入 } y = -x^2 + bx + c,$$

$$\begin{cases} 0 = -9 + 3b + c \\ 3 = c \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为：} y = -x^2 + 2x + 3.$$

(2) $\therefore$ 由 (1) 可知： $y = -x^2 + 2x + 3$

则 $PB = PA = \sqrt{2}m$,

由勾股定理得 :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 ,$$

$$16 = m^2 + (\sqrt{2}m - m)^2 ,$$

解得 : $m^2 = 8 + 4\sqrt{2}$,

$$\text{则 } PB^2 = 2m^2 = 16 + 8\sqrt{2} ,$$

②当 P 在 x 轴下方时 ,

此时 P' 与 P 关于 x 轴对称 ,

$$\therefore BP'^2 = PB^2 = 16 + 8\sqrt{2} ,$$

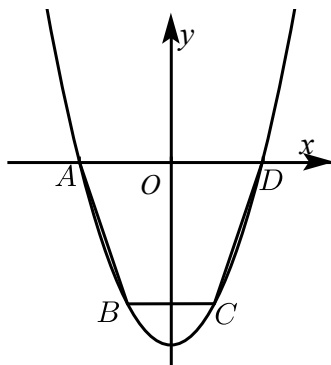
综上 : 存在 P , 此时 $BP^2 = 16 + 8\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

练习2

4. ★★★

如图 , 抛物线 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$) 经过梯形 $ABCD$ 的四个顶点 , 梯形的底 AD 在 x 轴上 , 其中 $A(-2, 0)$, $B(-1, -3)$.



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 点 N 为 y 轴上任意一点 , 当点 N 到 A 、 B 两点的距离之差为最大时 , 求此时点 N 的坐标.

【答案】 (1) $y = x^2 - 4$.

(2) $N(0, -6)$.

【解析】 (1) 因为点 A 、 B 均在抛物线上 ,

故点 A 、 B 的坐标适合抛物线方程

$$\therefore \begin{cases} 4a + c = 0 \\ a + c = -3 \end{cases}$$

$$\text{解之得 : } \begin{cases} a = 1 \\ c = -4 \end{cases} ;$$

故 $y = x^2 - 4$ 为所求 .

(2) 连接 AB , 交 y 轴于点 N , 则点 N 就是所求作的点.

设 AB 的解析式为 ,

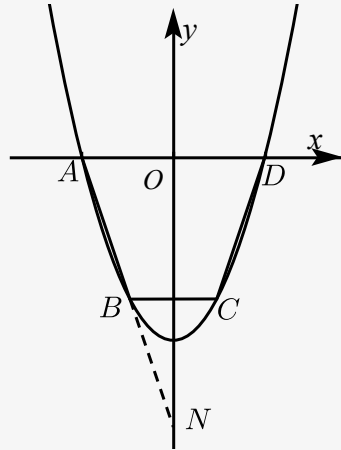
$$\text{则有 } \begin{cases} -2k + b = 0 \\ -k + b = -3 \end{cases} ,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -3 \\ b = -6 \end{cases} ,$$

故 AB 的解析式为 $y = -3x - 6$;

令 $x = 0$, 则 $y = -6$,

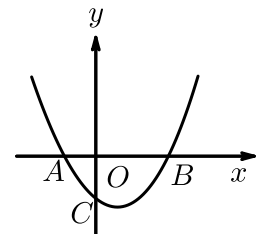
故 $N(0, -6)$.



【标注】【知识点】二次函数一般式

5. 2018~2019学年浙江宁波镇海区宁波市镇海蛟川书院初三上学期期中第22题10分 ★★★

如图, 抛物线经过 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$, $C\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ 三点 .



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 点 M 为抛物线上第四象限内的一动点, $\triangle MBC$ 面积是否存在最大值, 若存在, 求点 M 的坐标, 若不存在, 请说明理由 .
- (3) 在抛物线的对称轴上有一点 P , 使 $|PB - PC|$ 的值最大, 直接写出点 P 的坐标 .

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$.

(2) $M\left(\frac{5}{2}, -\frac{35}{8}\right)$.

(3) $P\left(2, -\frac{15}{2}\right)$.

【解析】 (1) 设 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{则} \begin{cases} 0 = a - b + c \\ 0 = 25a + 5b + c \\ -\frac{5}{2} = c \end{cases}, \therefore \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -\frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}.$$

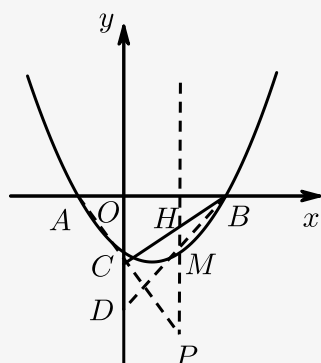
$$(2) \text{ 设 } M\left(m, \frac{1}{2}m^2 - 2m - \frac{5}{2}\right),$$

$$\text{设直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = kx - \frac{5}{2},$$

$$\text{代入 } B(5, 0), 5k - \frac{5}{2} = 0, \text{ 解得 } k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore l_{BC}: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2},$$

过点 M 作 $MH \parallel y$ 轴, 交 BC 于 H ,



$$\therefore H\left(m, \frac{1}{2}m - \frac{5}{2}\right),$$

$$\therefore S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot OB$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}m - \frac{5}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}m^2 - 2m - \frac{5}{2} \right) \right] \cdot 5 = -\frac{5}{4}m^2 + \frac{25}{4}m$$

$$= -\frac{5}{4} \left(m - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{125}{16},$$

$$\text{当 } m = \frac{5}{2} \text{ 时, } S_{\triangle MBC} \text{ 有最大值 } \frac{125}{16},$$

$$\text{此时 } M\left(\frac{5}{2}, -\frac{35}{8}\right).$$

(3) A 和 B 关于对称轴对称,

$$\therefore |PB - PC| = |PA - PC| \leq |AC|,$$

当且仅当 P 在 AC 与对称轴的交点时, $|PB - PC|$ 取最小值,

$$\text{对称轴为 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times \frac{1}{2}} = 2,$$

$$\text{设直线 } AC \text{ 解析式: } y = kx - \frac{5}{2},$$

$$\text{代入 } A(-1, 0) \text{ 得 } -k - \frac{5}{2} = 0,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{5}{2},$$

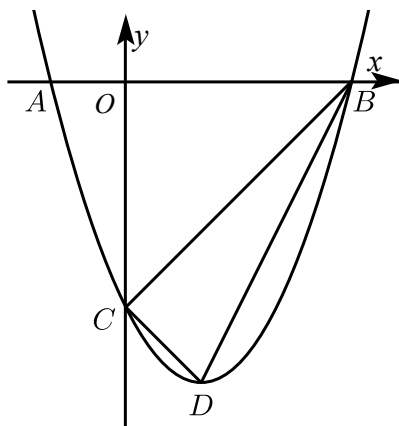
$$\therefore l_{AC} = y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = -\frac{5}{2} \cdot 2 - \frac{5}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$\therefore P\left(2, -\frac{15}{2}\right).$$

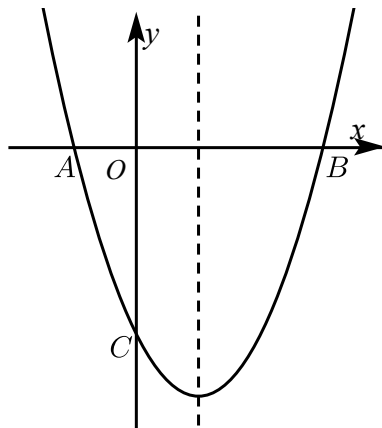
6. ★★★★★

如图，抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.



(1) 点 D 为抛物线的顶点，在抛物线上找点 Q 使得 $S_{\triangle DBC} = S_{\triangle QBC}$ ，求出所有的点 Q .

(2) 在抛物线的对称轴上找一点 P ，使得 $|PB - PC|$ 最大，求 P 点坐标 .



【答案】(1) $Q_1(1, -4)$, $Q_2(2, -3)$, $Q_3(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2})$, $Q_4(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$.

(2) $P(1, -6)$.

【解析】(1) 双轨平行线， $Q_1(1, -4)$, $Q_2(2, -3)$, $Q_3(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2})$,
 $Q_4(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$.

(2) 略 .

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

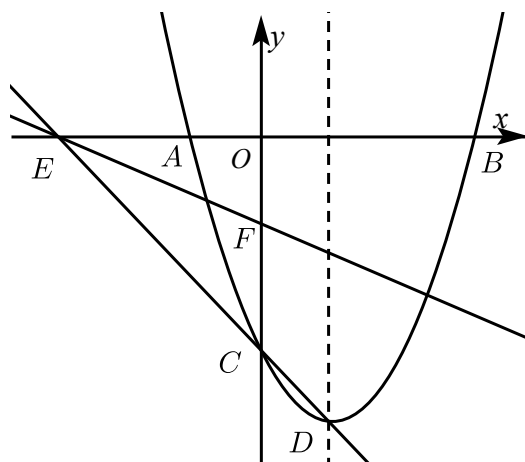
练习3

7. ★★★★★

如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于 C 点，且

$OC = OB = 3OA = 3$ ，点 D 为抛物线顶点，作直线 CD 与 x 交于点 E ，过 E 作 $\angle BED$ 的角平分线与 y

轴交于点 F .



(1) 求抛物线的表达式和点 F 的坐标 .

(2) 点 M 是射线 EF 上的动点 , 点 N 是线段 BE 上的动点 , M 、 N 在何位置时 , $BM + MN$ 的值最小 . 请求出 $BM + MN$ 的最小值和 M 、 N 的坐标 .

【答案】 (1) 抛物线的表达式 : $y = x^2 - 2x - 3$, 点 F 的坐标 $(0, 3 - 3\sqrt{2})$.

(2) 最小值 $3\sqrt{2}$, $M(3\sqrt{2} - 3, 3\sqrt{2} - 6)$, $N(3\sqrt{2} - 3, 0)$.

【解析】 (1) 略

(2) 略

【标注】 【知识点】二次函数与轴对称问题

练习4

8. 2021年重庆渝中区重庆二十九中中考模拟(二)第12题 ★★★

如图 , 抛物线 $y = -x^2 + 2x + m + 1$ (m 为常数) 交 y 轴于点 A , 与 x 轴的一个交点在 2 和 3 之间 , 顶点为 B .

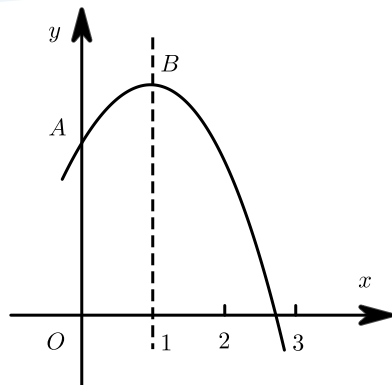
① 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时 , $y > 0$;

② 抛物线 $y = -x^2 + 2x + m + 1$ 与直线 $y = m + 2$ 有且只有一个交点 ;

③ 将该抛物线向左平移 2 个单位 , 再向下平移 2 个单位 , 所得抛物线解析式为 $y = -(x + 1)^2 + m$;

④ 点 A 关于直线 $x = 1$ 的对称点为 C , 点 D 、 E 分别在 x 轴和 y 轴上 , 当 $m = 1$ 时 , 四边形 $BCDE$ 周长的最小值为 $\sqrt{34} + \sqrt{2}$.

其中正确的判断有 () .



A. ①②③④

B. ②③④

C. ③④

D. ②③

【答案】 B

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + 2x + m + 1 = -(x-1)^2 + m + 2$,

对称轴为直线 $x = 1$, 开口向下, 与 x 轴一个交点在 2 和 3 之间,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴另一个交点在与 -1 与 0 之间,

$\therefore$ 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $y > 0$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交点具体坐标值不确定,

故①错误;

②把 $y = m + 2$ 代入 $y = -x^2 + 2x + m + 1$ 中,

得 $x^2 - 2x + 1 = 0$,

$\therefore \Delta = 4 - 4 = 0$,

$\therefore$ 此方程两个相等的实数根,

则抛物线 $y = -x^2 + 2x + m + 1$ 与直线 $y = m + 2$ 有且只有一个交点,

故②结论正确;

③将该抛物线向左平移 2 个单位, 再向下平移 2 个单位,

抛物线的解析式为: $y = -(x+2)^2 + 2(x+2) + m + 1 - 2$,

即 $y = -(x+1)^2 + m$,

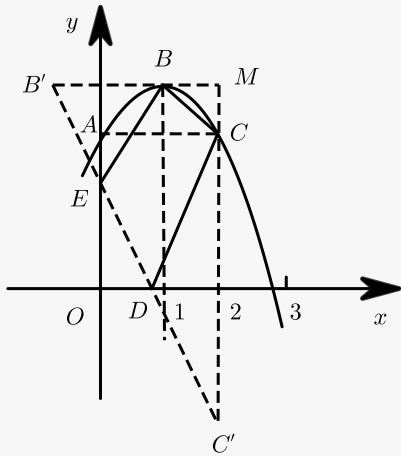
故③结论正确;

④当 $m = 1$ 时, 抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 2x + 2$,

$\therefore A(0, 2), C(2, 2), B(1, 3)$,

作点 B 关于 y 轴的对称点 $B'(-1, 3)$, 作 C 点关于 x 轴的对称点 $C'(2, -2)$,

连接 $B'C'$, 与 x 轴、 y 轴分别交于 D 、 E 点, 如图,



则 $BE + ED + CD + BC = B'E + ED + C'D + BC = B'C' + BC$,

根据两点之间线段最短, 知 $B'C'$ 最短, 而 BC 的长度一定,

$\therefore$ 此时, 四边形 $BCDE$ 周长 $= B'C' + BC$ 最小, 为:

$$\begin{aligned} & \sqrt{B'M^2 + C'M^2} + \sqrt{BM^2 + CM^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 5^2} + \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{34} + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

故④结论正确,

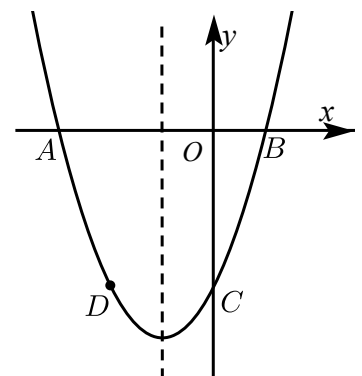
所以正确的有②③④,

故选 B.

【标注】【知识点】四边形周长最小

9. ★★★★★

如图, 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 其中 A 点坐标为 $(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 点 $D(-2, -3)$ 在抛物线上.

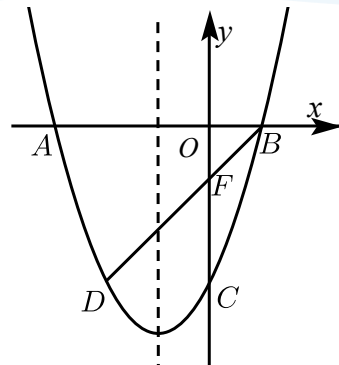


(1) 求抛物线的解析式.

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(3) 抛物线的对称轴上有一动点 P , 求出 $PA + PD$ 的最小值.

(4) 如图, 若直线 DB 与 y 轴交于点 F , 点 M 是对称轴 $x = -1$ 上一个动点, 点 N 是 x 轴上一个动点, 则四边形 $CFNM$ 的周长是否有最小值? 若有, 试求出这个最小值; 若没有, 请说明理由.



【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3$.

(2) 6.

(3) $3\sqrt{2}$.

(4) 有最小值. 最小值是 $2\sqrt{5} + 2$.

【解析】 (1) 由题意, 得 $\begin{cases} 9 - 3b + c = 0 \\ 4 - 2b + c = -3 \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

故抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$.

故答案为: $y = x^2 + 2x - 3$.

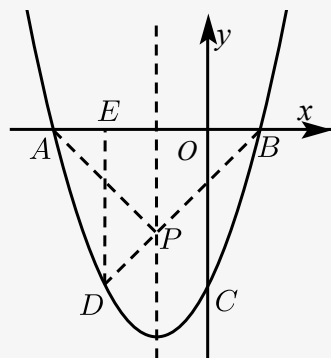
(2) 令 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 则 $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. 故点 B 的坐标为 $(1, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, -3)$.

则 $AB = 4$, $OC = 3$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

故答案为: 6.

(3) 点 A 与点 B 关于 $x = -1$ 对称, 如图, 连接 BD 交直线 $x = -1$ 于点 P , 则点 P 即为所求.



作 $DE \perp AB$ 于 E , 则 $BE = 3$, $DE = 3$, 由勾股定理, 得 $BD = 3\sqrt{2}$.

故 $PA + PD$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$.

故答案为: $3\sqrt{2}$.

(4) 有最小值.

因为 D 点的坐标是 $(-2, -3)$, B 点的坐标是 $(1, 0)$, 所以直线 BD 的解析式为

$$y = x - 1.$$

所以点 F 的坐标是 $(0, -1)$. 点 F 关于 x 轴对称的点 F' 的坐标是 $(0, 1)$, 点 C 关于对称轴直线 $y = x - 1$ 对称的点是点 D .

线段 $DF' + CF$ 的长就是四边形 $CFNM$ 的周长的最小值 , 线段 DF' 与 $x = -1$ 的交点为此时的 M 点 , 线段 DF' 与 x 轴的交点为此时的 N 点 . $DF' = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

所以四边形 $CFNM$ 的周长的最小值是 $2\sqrt{5} + 2$.

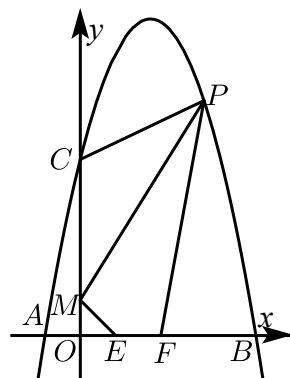
故答案为 : 有最小值 . 最小值是 $2\sqrt{5} + 2$.

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

练习5

10. 2014年海南中考真题第24题14分 ★★★★★

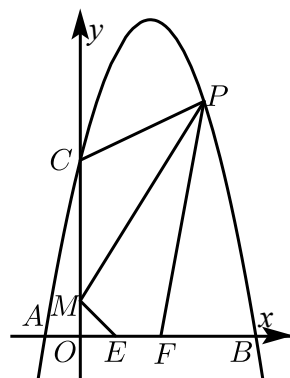
如图 , 对称轴为直线 $x = 2$ 的抛物线经过点 $A(-1, 0)$, $C(0, 5)$ 两点 , 与 x 轴另一交点为 B , 已知 $M(0, 1)$, $E(a, 0)$, $F(a+1, 0)$, 点 P 是第一象限内的抛物线上的动点 .



(1) 求此抛物线的解析式 .

(2) 当 $a = 1$ 时 , 求四边形 $MEFP$ 面积的最大值 , 并求此时点 P 的坐标 .

(3) 若 $\triangle PCM$ 是以点 P 为顶点的等腰三角形 , 求 a 为何值时 , 四边形 $PMEF$ 周长最小 ? 请说明理由 .



【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x + 5$.

(2) $\left(\frac{9}{4}, \frac{143}{16}\right)$.

$$(3) a = \frac{\sqrt{6}+1}{4}.$$

【解析】(1) 设抛物线为 $y = a(x-2)^2 + k$,

$\because$ 二次函数的图象过点 $A(-1, 0)$ 、 $C(0, 5)$,

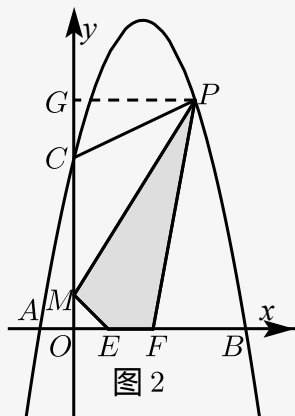
$$\therefore \begin{cases} 9a + k = 0 \\ 4a + k = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ k = 9 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数的函数关系式为 $y = -(x-2)^2 + 9$,

即 $y = -x^2 + 4x + 5$.

(2) 当 $a = 1$ 时, $E(1, 0)$, $F(2, 0)$,



设 P 的坐标为 $(x, -x^2 + 4x + 5)$,

过点 P 作 y 轴的垂线, 垂足为 G ,

则四边形 $MEFP$ 面积

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{四边形} OFPG} - S_{\triangle MGP} - S_{\triangle EOM} \\ &= \frac{1}{2}(OF + GP) \cdot OG - \frac{1}{2}GP \cdot MG - \frac{1}{2}OE \cdot OM \\ &= \frac{1}{2}(2 + x)(-x^2 + 4x + 5) - \frac{1}{2}x(-x^2 + 4x + 5 - 1) - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \\ &= -x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} \\ &= -\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{153}{16} \end{aligned}$$

所以, 当 $x = \frac{9}{4}$ 时, 四边形 $MEFP$ 面积的最大, 最大值为 $\frac{153}{16}$,

此时点 P 坐标为 $\left(\frac{9}{4}, \frac{143}{16}\right)$.

(3) $EF = 1$, 把点 M 向右平移 1 个单位得点 M_1 ,

再做点 M_1 关于 x 轴的对称点 M_2 .

在四边形 $PMEF$ 中,

$\because$ 边 PM , EF 为固定值,

$\therefore$ 要使四边形 $PMEF$ 周长最小, 则 $ME + PF$ 最小.

$\because ME = M_1F = M_2F$,

$\therefore$ 只要使 $M_2F + PF$ 最小即可,

$\therefore$ 点 F 应该是直线 M_2P 与 x 轴的交点.

由 $OM = 1$, $OC = 5$, 得点 P 的纵坐标为 3 ,

根据 $y = -x^2 + 4x + 5$ 可求得点 $P(2 + \sqrt{6}, 3)$,

又点 M_2 坐标为 $(1, -1)$,

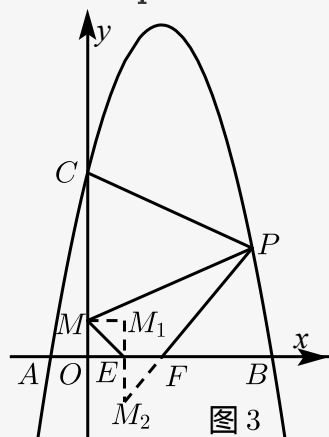
$\therefore$ 直线 M_2P 的解析式为 : $y = \frac{4\sqrt{6}-4}{5}x - \frac{4\sqrt{6}+1}{5}$,

当 $y = 0$ 时 , 求得 $x = \frac{\sqrt{6}+5}{4}$,

$\therefore F\left(\frac{\sqrt{6}+5}{4}, 0\right)$.

$\therefore a+1 = \frac{\sqrt{6}+5}{4}$, $a = \frac{\sqrt{6}+1}{4}$,

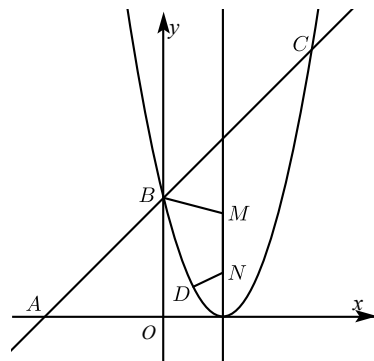
当 $a = \frac{\sqrt{6}+1}{4}$ 时 , 四边形 $PMEF$ 周长最小.



【标注】【知识点】二次函数的几何问题

11. ★★★

在平面直角坐标系中 , 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 2$, 且经过 $B(0, 4)$, $C(5, 9)$, 直线 BC 与 x 轴交于点 A .



(1) 求出直线 BC 及抛物线的解析式 .

(2) $D(1, y)$ 在抛物线上 , 在抛物线的对称轴上是否存在两点 M 、 N , 且 $MN = 2$, 点 M 在点 N 的上方 , 使得四边形 $BDNM$ 的周长最小 , 若存在 , 求出 M 、 N 两点的坐标 , 若不存在 , 请说明理由 .

【答案】 (1) 直线 BC 的解析式为 : $y = x + 4$, 抛物线的解析式为 : $y = x^2 - 4x + 4$.

(2) 存在, $M\left(2, \frac{10}{3}\right)$, $N\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

【解析】(1) 设 BC 直线解析式: $y = kx + b$,

$$\text{根据题意得: } \begin{cases} b = 4 \\ 9 = 5k + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = 4 \\ k = 1 \end{cases},$$

直线 BC 的解析式为: $y = x + 4$,

$\because$ 抛物线的对称轴为 $x = 2$,

设抛物线的解析式为 $y = a(x - 2)^2 + t$,

$$\text{根据题意得 } \begin{cases} 4 = a(0 - 2)^2 + t \\ 9 = a(5 - 2)^2 + t \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = 1 \\ t = 0 \end{cases},$$

抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 4$.

(2) $\because$ 若四边形 $BDNM$ 的周长最短, 求出 $BM + DN$ 最短即可,

$\because$ 点 D 在抛物线上,

$\therefore D(1, 1)$,

$\therefore D$ 点关于直线 $x = 2$ 的对称点是 $D_1(3, 1)$,

$\because B(0, 4)$,

$\therefore$ 将 B 点向下平移 2 个单位得到 $B_1(0, 2)$,

$\therefore$ 直线 B_1D_1 交直线 $x = 2$ 于点 N ,

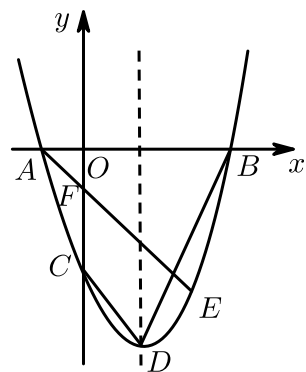
$\because$ 直线 B_1D_1 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 2$,

$\therefore N\left(2, \frac{4}{3}\right)$, $\because MN = 2$, $\therefore M\left(2, \frac{10}{3}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

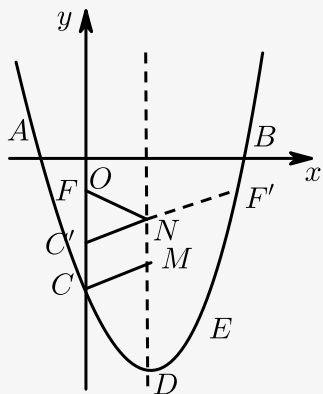
12. ★★★★★

如图, 抛物线 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - 2x - 6\sqrt{2}$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 点 D 为顶点, 点 E 在抛物线上, 且横坐标为 $4\sqrt{2}$, AE 与 y 轴交于 F . 点 M, N 是抛物线对称轴上两点, 且 $M(2\sqrt{2}, a)$, $N(2\sqrt{2}, a + \sqrt{2})$, 是否存在 a 使 F, C, M, N 四点所围成的四边形周长最小, 若存在, 求出这个周长最小值, 并求出 a 的值.



【答案】 $9\sqrt{2}$; $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

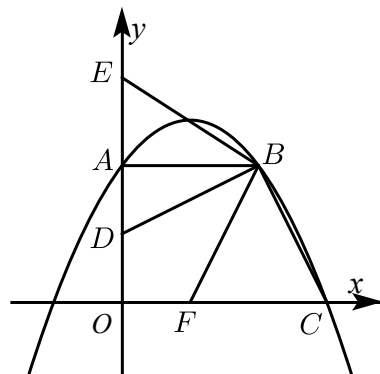
【解析】 $D(2\sqrt{2}, -8\sqrt{2})$, $F(0, -2\sqrt{2})$, 把点 C 向上平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度得 $C'(0, -5\sqrt{2})$, 作点 F 关于直线 $x = 2\sqrt{2}$ 的对称点 $F'(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, 连接 $C'F'$ 交直线 $x = 2\sqrt{2}$ 于点 N , 则此时 F, C, M, N 四点所围成的四边形周长最小, 解得 $a = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$.



【标注】 【知识点】二次函数与轴对称问题

13. 2019年广东深圳南山区北京师范大学南山附属中学初三中考一模第23题9分 ★★★★★

如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直角梯形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上, OC 在 x 轴的正半轴上, $OA = AB = 2$, $OC = 3$, 过点 B 作 $BD \perp BC$, 交 OA 于点 D . 将 $\angle DBC$ 绕点 B 按顺时针方向旋转, 角的两边分别交 y 轴的正半轴、 x 轴的正半轴于点 E 和 F .



- (1) 求经过 A, B, C 三点的抛物线的解析式.
- (2) 当 BE 经过 (1) 中抛物线的顶点时, 求 CF 的长.
- (3) 在抛物线的对称轴上取两点 P, Q (点 Q 在点 P 的上方), 且 $PQ = 1$, 要使四边形 $BCPQ$ 的周长最小, 求出 P, Q 两点的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$.

(2) $CF = \frac{7}{3}$.

(3) 点 P 的坐标为 $(1, \frac{2}{3})$, 点 Q 的坐标为 $(1, \frac{5}{3})$.

【解析】 (1) 由题意得 $A(0, 2), B(2, 2), C(3, 0)$.

设经过 A, B, C 三点的抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + 2$.

$$\text{则} \begin{cases} 4a + 2b + 2 = 2 \\ 9a + 3b + 2 = 0 \end{cases}$$

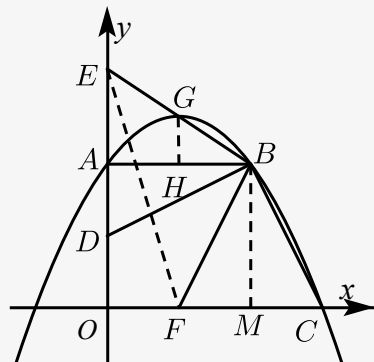
$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2.$$

$$(2) \text{ 由 } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{8}{3}.$$

$$\therefore \text{顶点坐标为 } G(1, \frac{8}{3}).$$

过 G 作 $GH \perp AB$, 垂足为 H .



$$\text{则 } AH = BH = 1, GH = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

$$\because EA \perp AB, GH \perp AB,$$

$$\therefore EA \parallel GH.$$

$$\therefore GH \text{ 是 } \triangle BEA \text{ 的中位线}.$$

$$\therefore EA = 2GH = \frac{4}{3}.$$

过 B 作 $BM \perp OC$, 垂足为 M .

$$\text{则 } MB = OA = AB.$$

$$\because \angle EBF = \angle ABM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle FBM = 90^\circ - \angle ABF.$$

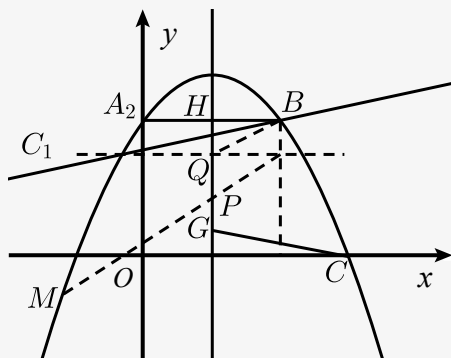
$$\therefore \text{Rt}\triangle EBA \cong \text{Rt}\triangle FBM.$$

$$\therefore FM = EA = \frac{4}{3}.$$

$$\because CM = OC - OM = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore CF = FM + CM = \frac{7}{3}.$$

(3) 要使四边形 $BCPQ$ 的周长最小, 可将点 C 向上平移一个单位, 再做关于对称轴对称的对称点 C_1 ,



得点 C_1 的坐标为 $(-1, 1)$.

可求出直线 BC_1 的解析式为 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

直线 $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ 与对称轴 $x = 1$ 的交点即为点 Q , 坐标为 $(1, \frac{5}{3})$.

点 P 的坐标为 $(1, \frac{2}{3})$.

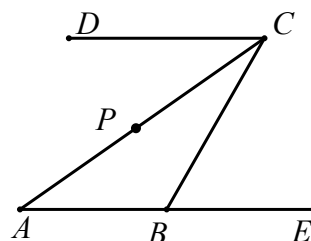
【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

二、胡不归问题

练习6

14. 2018~2019学年陕西西安碑林区西安交通大学附属中学初二上学期期末第10题3分 ★★★

如图, 已知 $AE \parallel CD$, $AB = 2$, $\angle CBE = 2\angle A = 60^\circ$, P 是线段 AC 上的任意一点, 则 $BP + \frac{1}{2}CP$ 的最小值为 () .



A. $\sqrt{3}$

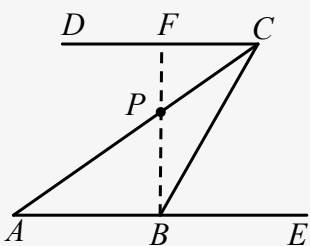
B. 2

C. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

D. $\sqrt{3} + 1$

【答案】A

【解析】如图所示: 过点 B 作 $BF \perp DC$, 垂足为 F , BF 交 AC 与点 P .



$\because \angle CBE = 2\angle A = 60^\circ$, $\angle CBE = \angle A + \angle ACB$,

$\therefore \angle A = \angle ACB = 30^\circ$.

$\therefore BC = AB = 2$.

$\because AE \parallel CD$,

$\therefore \angle ACD = \angle A = 30^\circ$,

$\therefore PF = \frac{1}{2}PC$.

$\therefore BF = BP + PF = BP + \frac{1}{2}PC$,

由垂线段最短可知: 当 $BF \perp DC$ 时, BF 有最小值, 即 $BP + \frac{1}{2}PC$ 有最小值 .

$$\therefore BP + \frac{1}{2}PC \text{的最小值} = BF = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}.$$

故选 A .

【标注】【知识点】胡不归问题

15. 2019~2020学年12月湖南长沙长沙县明德教育集团初三上学期月考第18题3分 ★★★

已知点 $Q\left(\frac{9}{2}, y_Q\right)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 图象上, 点 A 为抛物线与 x 轴的交点且位于 x 轴负半轴上. 点 $M(m, 0)$ 是 x 轴正半轴上的一个动点. 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM$ 的最小值为 _____ .

【答案】 $\frac{33\sqrt{2}}{8}$

【解析】 当 $x = \frac{9}{2}$ 时, $y = \frac{81}{4} - 18 - 5 = -\frac{11}{4}$,

$$\therefore Q\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{4}\right),$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x^2 - 4x - 5 = 0,$$

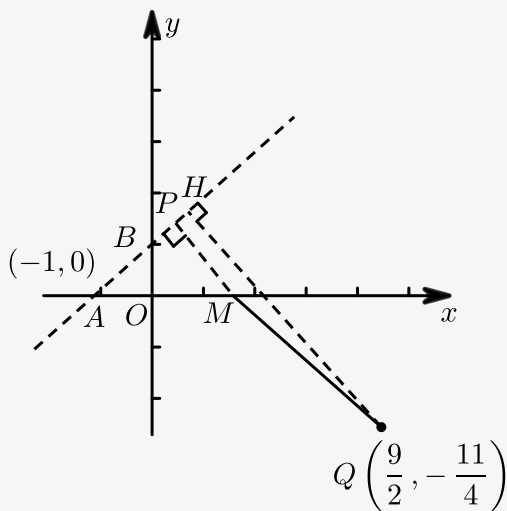
$$\text{解得 } x = 5 \text{ 或 } -1,$$

$$\therefore A(-1, 0),$$

$$\text{作直线 } y = x + 1 \text{ 与 } y \text{ 轴交于 } B(0, 1),$$

$$\therefore \angle BAM = 45^\circ,$$

过 M 作 $MP \perp AB$ 于 P, 过 Q 作 $QH \perp AB$ 于 H,



$\therefore \triangle APM$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AM = \sqrt{2}PM,$$

$$\text{即 } PM = \frac{\sqrt{2}}{2}AM,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM = PM + QM \geq QH,$$

$\therefore$ 当且仅当 P, M, Q 三点共线且 $PQ \perp AB$ 时, $\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM$ 取得最小值,

$$\therefore HQ \perp AB,$$

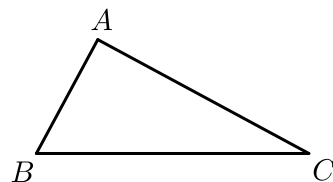
$\therefore$ 设直线 HQ 的解析式为 $y = -x + b$,

$$\begin{aligned}
&\text{将 } Q\left(\frac{9}{2}, -\frac{11}{4}\right) \text{ 代入 } y = -x + b \text{ 得 } -\frac{9}{2} + b = -\frac{11}{4}, \\
&\therefore b = \frac{7}{4}, \\
&\therefore y = -x + \frac{7}{4}, \\
&\text{联立 } \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + \frac{7}{4} \end{cases}, \\
&\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{11}{8} \end{cases}, \\
&\therefore H\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{8}\right), \\
&\therefore HQ = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{8}\right)^2 + \left(-\frac{11}{4} - \frac{11}{8}\right)^2} = \frac{33\sqrt{2}}{8}, \\
&\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM \text{ 的最小值为 } \frac{33\sqrt{2}}{8}. \\
&\text{故答案为: } \frac{33\sqrt{2}}{8}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】胡不归问题

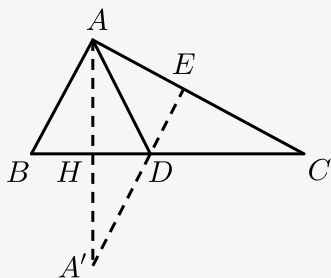
16. 2020年新疆中考真题第15题5分 ★★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ，若 D 是 BC 边上的动点，则 $2AD + DC$ 的最小值为 _____。



【答案】 6

【解析】



如图所示，作点 A 关于 BC 的对称点 A' ，连接 AA' ， $A'D$ ，过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ， AA' 交 BC 于点 H ，

$\therefore \triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ，

$\therefore BH = 1$ ， $AH = \sqrt{3}$ ， $AA' = 2\sqrt{3}$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle CDE$ 中， $DE = \frac{1}{2}CD$ ，即 $2DE = CD$ ，

$\therefore A$ 与 A' 关于 BC 对称，

$$\therefore AD = A'D,$$

$$\therefore AD + DE = A'D + DE,$$

$\therefore$ 当 A', D, E 在同一直线上时, $AD + DE$ 的最小值等于 $A'E$ 的长,

$$\text{此时, Rt}\triangle AA'E\text{中, } A'E = \sin 60^\circ \times AA' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3,$$

$\therefore AD + DE$ 的最小值为 3,

即 $2AD + CD$ 的最小值为 6.

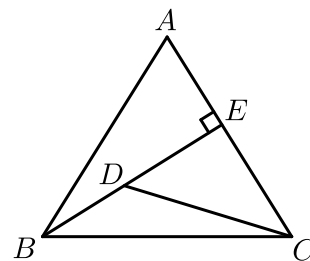
故答案为: 6.

【标注】【知识点】轴对称的性质

【能力】推理论证能力

17. 2020~2021学年广东广州海珠区中山大学附属中学初三下学期开学考试第10题3分 ★★★

如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $\frac{BE}{AE} = 2$, $BE \perp AC$ 于点 E , D 是线段 BE 上的一个动点, 则 $CD + \frac{\sqrt{5}}{5}BD$ 的最小值是 ().



A. 10

B. $2\sqrt{5}$

C. $5\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{5}$

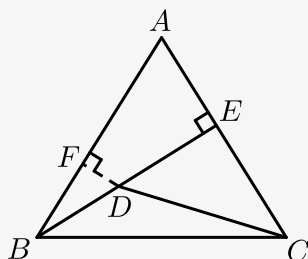
【答案】 D

【解析】 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\frac{BE}{AE} = 2$,

$$\therefore AE : BE : AB = 1 : 2 : \sqrt{5},$$

$$\therefore \sin B = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

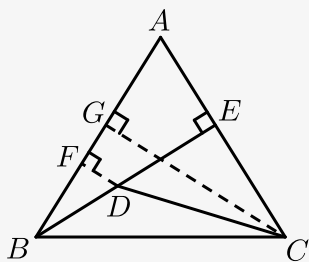
过 D 作 $DF \perp AB$, 垂足为 F ,



$$\text{在 Rt}\triangle BDF\text{中, } \sin B = \frac{DF}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DF = \frac{\sqrt{5}}{5}BD,$$

过 C 作 $CG \perp AB$, 垂足为 G ,



$$\begin{aligned} \therefore \left(CD + \frac{\sqrt{5}}{5} BD \right)_{\min} &= (CD + DF)_{\min} = CG, \\ \therefore S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CG = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE, \quad AB = AC, \\ \therefore CG &= BE = \frac{10}{\sqrt{5}} \times 2 = 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

故选 D.

【标注】【知识点】胡不归问题

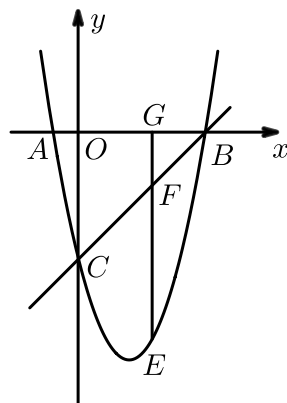
练习7

18. ★★★★★

抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，其中点 A 坐标为 $(-1, 0)$ ，一次函数 $y = x + k$ 的图象经过点 B 、 C 。

(1) 试求二次函数及一次函数的解析式。

(2) 如图，点 E 为抛物线位于直线 BC 下方图象上的一个动点，过点 E 作直线 $EG \perp x$ 轴于点 G ，交直线 BC 于点 F ，当 EF 最大时，求点 E 的坐标。



(3) 在 (2) 的情况下，在线段 BC 上有一动点 D ，当 $ED + \frac{\sqrt{2}}{2} BD$ 最小时，求点 D 坐标。

【答案】(1) 二次函数的解析式为 $y = x^2 - 4x - 5$ ，一次函数的解析式为 $y = x - 5$ 。

(2) $E\left(\frac{5}{2}, -\frac{35}{4}\right)$ 。

(3) $D\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 。

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ 的图象与 y 轴交于点 C ,

$\therefore C(0, -5)$,

∵一次函数 $y = x + k$ 的图象经过点 B 、 C ，

$$\therefore k = -5,$$

$$\therefore B(5, 0),$$

设抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-5) = ax^2 - 4ax - 5a$,

$$\therefore -5a = -5,$$

$$\therefore a = 1,$$

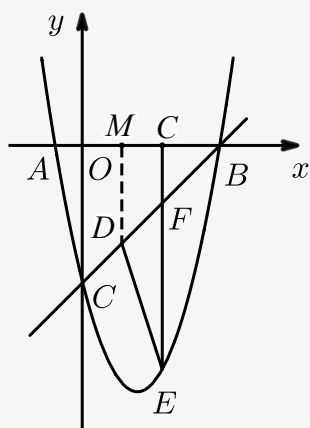
∴二次函数的解析式为 $y = x^2 - 4x - 5$ ，一次函数的解析式为 $y = x - 5$ 。

(2) 设 $E(m, m^2 - 4m - 5)$ ，则 $F(m, m - 5)$ ，

$$\therefore EF = (m - 5) - (m^2 - 4m - 5) = 5m - m^2,$$

$$\therefore m = \frac{5}{2} \text{ 时, } EF \text{ 最大, 此时 } E\left(\frac{5}{2}, \frac{35}{4}\right).$$

(3) 过点 D 作 $DM \perp x$ 轴，



$$\therefore DM = \frac{\sqrt{2}}{2} BD,$$

$$\therefore ED + \frac{\sqrt{2}}{2} BD = ED + DM \geq |y_E|,$$

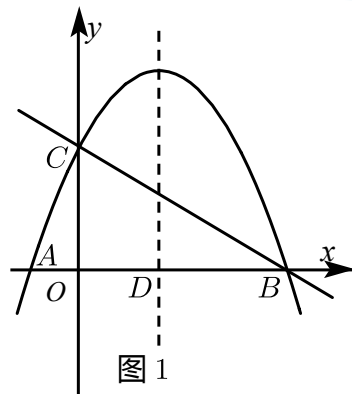
当 E, D, M 三点共线且 $EM \perp x$ 轴时， $ED + \frac{\sqrt{2}}{2} BD$ 取得最小值，

此时，点 D 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

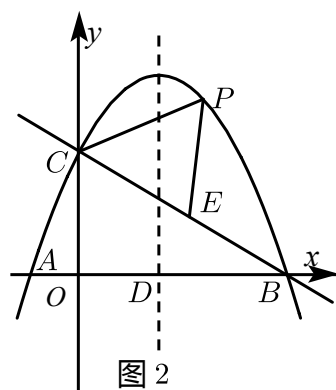
19. 2017~2018学年重庆巴南区初三下学期期中第26题12分 ★★★★★

如图1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C ，对称轴与 x 轴交于点 D 。



(1) 求直线 BC 的解析式 .

(2) 如图 2 , 点 P 为直线 BC 上方抛物线上一点 , 连接 PB 、 PC . 当 $\triangle PBC$ 的面积最大时 , 在线段 BC 上找一点 E (不与 B 、 C 重合) , 使 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的值最小 , 求点 P 的坐标和 $PE + \frac{1}{2}BE$ 的最小值 .



【答案】 (1) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

(2) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

【解析】 (1) 当 $x = 0$ 时 , $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, \sqrt{3})$;

当 $y = 0$ 时 , 有 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} = 0$,

解得 : $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 0)$.

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

将 $B(3, 0)$ 、 $C(0, \sqrt{3})$ 代入 $y = kx + b$, 得 :

$$\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}, \text{ 解得 : } \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

故答案为 : $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

(2) 如图 2 中 , 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 交直线 BC 于点 F .

$EN \perp x$ 轴 ,

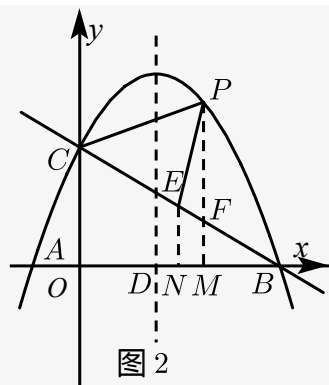


图 2
设 $P\left(a, -\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}a + \sqrt{3}\right)$, 则 $F\left(a, -\frac{\sqrt{3}}{3}a + \sqrt{3}\right)$,

$$\therefore PF = -\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + \sqrt{3}a,$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times PF \times 3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}a,$$

$\therefore$ 当 $a = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PBC}$ 最大,

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right),$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

$\therefore \angle CBO = 30^\circ$, $EN \perp x$ 轴,

$$\therefore EN = \frac{1}{2}BE,$$

$$\therefore PE + \frac{1}{2}BE = PE + EN,$$

$\therefore$ 根据两点之间线段最短和垂线段最短, 则当 P, E, N 三点共线且垂直于 x 轴时, $PE + \frac{1}{2}BE$ 值最小.

$$\therefore PE + \frac{1}{2}BE = PE + EN = PN = \frac{5\sqrt{3}}{4},$$

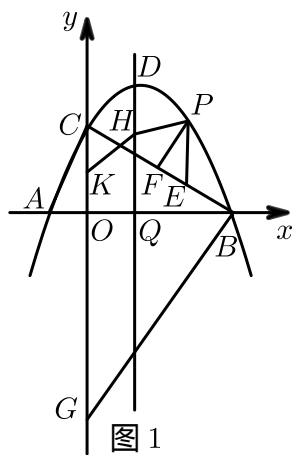
故答案为: $\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

【标注】【知识点】二次函数与直角三角形结合

20. 2019年重庆中考真题B卷第26题8分 ★★★★★

在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C, 顶点为 D, 对称轴与 x 轴交于点 Q.

如图 1, 连接 AC, BC. 若点 P 为直线 BC 上方抛物线上一动点, 过点 P 作 $PE \parallel y$ 轴交 BC 于点 E, 作 $PF \perp BC$ 于点 F, 过点 B 作 $BG \parallel AC$ 交 y 轴于点 G. 点 H, K 分别在对称轴和 y 轴上运动, 连接 PH, HK. 当 $\triangle PEF$ 的周长最大时, 求 $PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$ 的最小值及点 H 的坐标.



【答案】(1) $PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$ 的最小值为 10, 此时 $H(1, \sqrt{3})$.

【解析】(1) 对于抛物线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$, 令 $x = 0$, 得到 $y = 2\sqrt{3}$, 令 $y = 0$, 得到

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3} = 0, \text{ 解得 } x = -2 \text{ 或 } 4,$$

$$\therefore C(0, 2\sqrt{3}), A(-2, 0), B(4, 0),$$

$$\text{抛物线顶点 } D \text{ 坐标 } \left(1, \frac{9\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$\because PF \perp BC,$$

$$\therefore \angle PFE = \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\because PE \parallel OC,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle BCO,$$

$$\therefore \triangle PEF \sim \triangle BCO,$$

$\therefore$ 当 PE 最大时, $\triangle PEF$ 的周长最大,

$$\because B(4, 0), C(0, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3},$$

$$\text{设 } P\left(m, -\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3}\right),$$

$$\text{则 } E\left(m, -\frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3}\right),$$

$$\therefore PE = -\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}m + 2\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}m^2 + \sqrt{3}m,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, PE 有最大值,

$$\therefore P(2, 2\sqrt{3}),$$

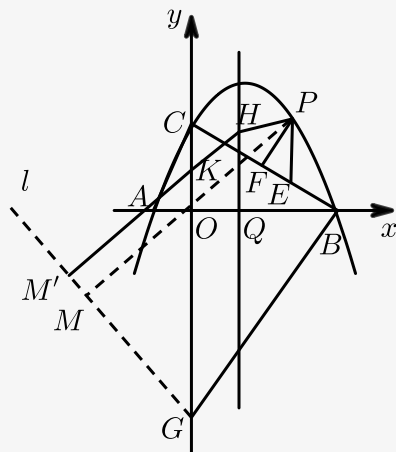
如图, 将直线 GO 绕点 G 逆时针旋转 60° , 得到直线 l ,

作 $PM \perp$ 直线 l 于 M , $KM' \perp$ 直线 l 于 M' , 则

$$PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG = PH + HK + KM' \geq PM,$$

$$\therefore P(2, 2\sqrt{3}),$$

$\therefore \angle POB = 60^\circ$,
 $\therefore \angle MOG = 30^\circ$,
 $\therefore \angle MOG + \angle BOC + \angle POB = 180^\circ$,
 $\therefore P, O, M$ 共线, 可得 $PM = 10$,
 $\therefore PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$ 的最小值为 10 , 此时 $H(1, \sqrt{3})$.

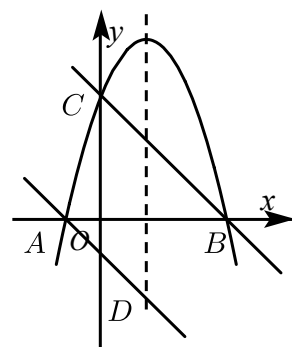


【标注】【知识点】二次函数与动点问题

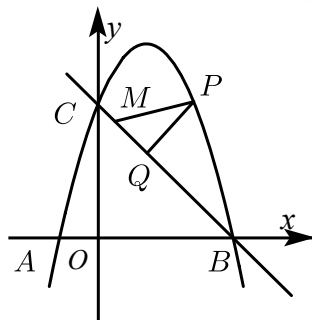
练习8

21. 2021年四川绵阳江油市初三中考二模第24题12分 ★★★★★

如图, 抛物线 $y = -\frac{6}{5}x^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}x + 2$ 的图象与 x 轴交于点 A 、 B , 与 y 轴交于点 C , 连接 BC , 过点 A 作 $AD \parallel BC$ 交抛物线的对称轴于点 D .



- (1) 求点 D 的坐标.
- (2) 如图, 点 P 是抛物线在第一象限内的一点, 作 $PQ \perp BC$ 于 Q , 当 PQ 的长度最大时, 在线段 BC 上找一点 M (不与点 B 、点 C 重合), 使 $PM + \frac{2}{3}BM$ 的值最小, 求点 M 的坐标及 $PM + \frac{2}{3}BM$ 的最小值.



【答案】(1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

(2) $\frac{5}{2}$; $M\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 1\right)$.

【解析】(1) 由题意得 $y = -\frac{6}{5}x^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}x + 2$,

当 $y = 0$ 时, $-\frac{6}{5}x^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}x + 2 = 0$,

解得 $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\therefore A\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, 0\right)$, $B(\sqrt{5}, 0)$, $C(0, 2)$,

$\therefore$ 直线 BC 为 $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + 2$,

又 $\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 直线 AD 为 $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{2}{3}$,

又 $\because$ 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\therefore$ 当 $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 时, $y = -\frac{4}{3}$,

$\therefore$ 点 D 点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

(2) 如图, 作 $PF \parallel y$ 轴交 BC 于 F , 则 $\triangle PQF \sim \triangle BOC$,

$\therefore \frac{PQ}{BO} = \frac{PF}{BC}$,

$\therefore \frac{PQ}{PF} = \frac{BO}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 即 $PQ = \frac{\sqrt{5}}{3}PF$,

设 $P\left(t, -\frac{6}{5}t^2 + \frac{4\sqrt{5}}{5}t + 2\right)$, 则 $F\left(t, -\frac{2\sqrt{5}}{5}t + 2\right)$,

$\therefore PF = -\frac{6}{5}t^2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}t = -\frac{6}{5}\left(t - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 当 $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时, PF 取最大值, PQ 取最大值, 此时 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

作 $MN \perp x$ 轴于 N , 则 $\triangle BMN \sim \triangle BOC$,

$\therefore \frac{MN}{OC} = \frac{BM}{BC}$,

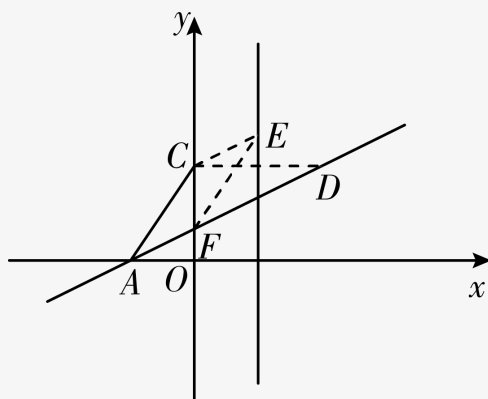
$\therefore \frac{MN}{BM} = \frac{OC}{BC} = \frac{2}{3}$, 则 $PM + \frac{2}{3}BM = PM + MN$,

$\therefore$ 当 P, M, N 共线时, $PM + \frac{2}{3}BM$ 取得最小值为 $\frac{5}{2}$, 此时 $M\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 1\right)$.

∴ 抛物线的解析式为： $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

(2) 解：存在，分三种情况讨论，

① 如图所示，



∴ 四边形 $ACEF$ 为平行四边形，

∴ EF 可由 AC 平移得到， C 、 E 为对应点， A 、 F 为对应点，

∴ $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ，点 E 的横坐标为 1，

∴ 向右平移了一个单位，

∴ $A(-1, 0)$ ，

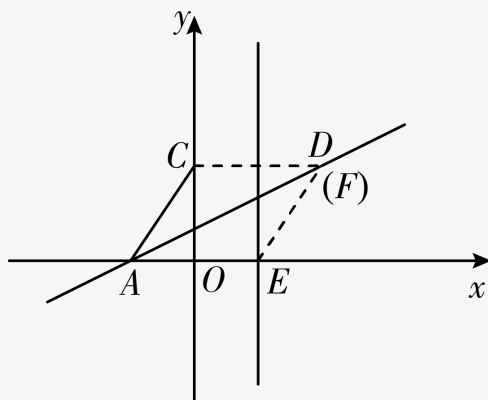
∴ F 的横坐标为 0，

∴ 直线 AD 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ，

∴ 当 $x = 0$ 时， $y = \frac{1}{2}$ ，

∴ $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

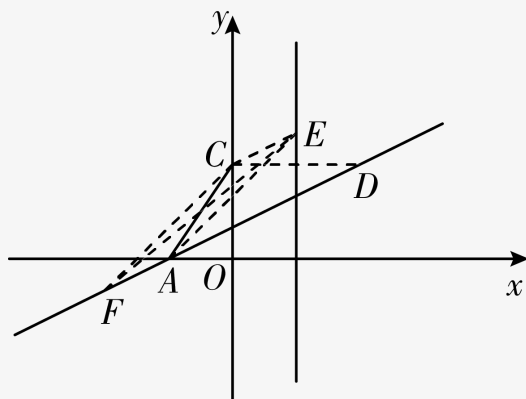
② 如图所示，



此时点 F 与点 D 重合，

∴ $F\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

③ 如图所示，



根据平移的规律，得知点 F 的横坐标为 -2 ，

当 $x = -2$ 时， $y = -\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore F\left(-2, -\frac{1}{2}\right).$$

综上所述：点 F 的坐标为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ 。

(3) 解：如图所示，过点 B 作 AD 的平行线交抛物线的对称轴于点 N ，过点 P 作 PH 垂

直于 BN ，与 x 轴的交点即为点 Q ，

设直线 BN 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + b$ ，过点 $B(3, 0)$ ，

解得 $b = -\frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 直线 BN 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，

$\therefore N(1, -1)$ ，

设直线 AD 与抛物线的对称轴的交点为点 M ，

$\therefore M(1, 1)$ ，

$$\therefore S_{\triangle ADP} = PM \cdot (x_D - x_A) \cdot \frac{1}{2} = 3，$$

$\therefore PM = 2$ ，

$\therefore P(1, 3)$ ，

$\therefore \tan \angle ABN = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}QB = QH$ ，

$\therefore PQ + \frac{\sqrt{5}}{5}QB = PQ + QH$ ，

$\therefore$ 当 P 、 Q 、 H 三点共线时， $PQ + \frac{\sqrt{5}}{5}QB$ 最小，即为 PH ，

$\therefore PN = 4$ ， $\angle NPH = \angle ABN$ ，

$\therefore PH = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ 。

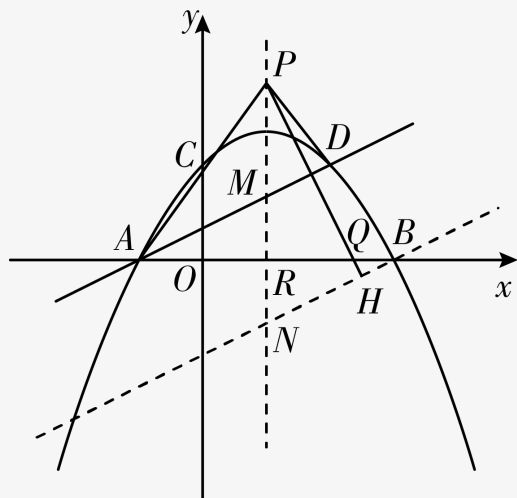
$\therefore PQ + \frac{\sqrt{5}}{5}QB$ 的最小值为 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ 。

$\therefore \angle QPR = \angle ABN$ ，

$\therefore \tan \angle QPR = \tan \angle ABN = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore PR = 3$ ，

$$\therefore Q\left(\frac{5}{2}, 0\right) .$$



独步天下

(3) 设该抛物线的顶点为 C , 直线 AB 与该抛物线的对称轴交于点 E . 当以点 P, Q, C, E 为顶点的四边形是平行四边形时, 求点 P 的坐标.

$$(3) \quad (2, -3), \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right).$$
$$\begin{cases} b = -3 \\ 3k + b = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=1 \\ b=-3 \end{cases} ,$$

$\therefore$ 直线解析式 $y = x - 3$.

(2) 设 $P(m, m^2 - 2m - 3)$, 则 $Q(m, m - 3)$.

根据题意 , 得 $0 < m < 3$,

$$\therefore PQ = m - 3 - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 3m .$$

设直线 PQ 与 x 轴交于点 H , 则 $H(m, 0)$.

$$\therefore OA = OB = 3 ,$$

$$\therefore \angle OBA = 45^\circ ,$$

$$\therefore BQ = \sqrt{2}BH = (3 - m)\sqrt{2} .$$

$$\therefore PQ + 2\sqrt{2}BQ = -m^2 + 3m + 2(3 - m) = -m^2 + m + 6 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} .$$

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时 , $PQ + \sqrt{2}BQ$ 取得最大值 .

此时 P 点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$.

(3) $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

故 $C(1, -4)$,

$$\text{令 } x = 1, y = 1 - 3 = -2 ,$$

$$\therefore E(1, -2) ,$$

$$\text{则 } CE = -2 - (-4) = 2 ,$$

若以 P 、 Q 、 C 、 E 为顶点的四边形为平行四边形 ,

则 $PQ = CE$,

$$\therefore |-m^2 + 3m| = 2 ,$$

$$\therefore \textcircled{1} -m^2 + 3m = 2 ,$$

解得 $m = 1$ (舍) 或 2 ,

$$\therefore P_1(2, -3) ;$$

$$\textcircled{2} -m^2 + 3m = -2 ,$$

$$\text{解得 } m = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} ,$$

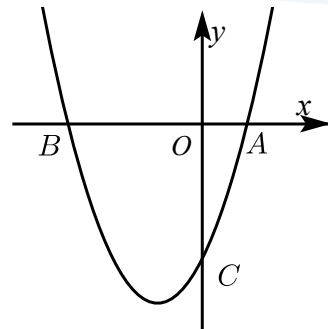
$$\therefore P_2\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) , P_3\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) ,$$

$$\text{故坐标为 } (2, -3) , \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) , \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) .$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

24. 2018~2019学年广东广州越秀区初三上学期期末第24题14分 ★★★

如图 , 抛物线 $y = x^2 - 2mx + 3m$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 , 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$.



- (1) 求该抛物线的解析式 .
- (2) 点 D 为该抛物线上的一点、且在第二象限内 , 连接 AC , 若 $\angle DAB = \angle ACO$, 求点 D 的坐标 .
- (3) 若点 E 为线段 OC 上一动点 , 试求 $2AE + \sqrt{2}EC$ 的最小值 .

【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3$.

(2) $\left(-\frac{10}{3}, \frac{13}{9}\right)$.

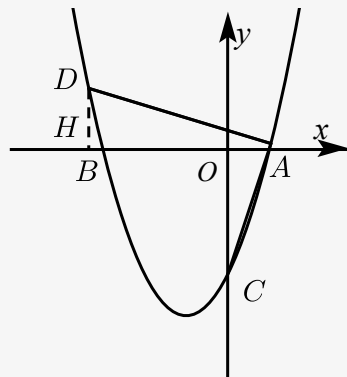
(3) $4\sqrt{2}$.

【解析】 (1) 把点 C 的坐标代入抛物线表达式得 : $9 + 6m + 3m = -3$,

解得 : $m = -1$,

故该抛物线的解析式为 : $y = x^2 + 2x - 3$.

(2) 过 D 点作 x 轴的垂线 , 交 x 轴于点 H ,



设 : 点 D 的坐标为 $(m, m^2 + 2m - 3)$,

$\because \angle DAB = \angle ACO$,

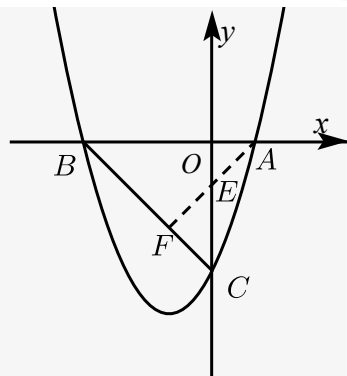
$\therefore \tan \angle DAB = \tan \angle ACO$,

即 : $\frac{DH}{AH} = \frac{AO}{CO}$, $\frac{m^2 + 2m - 3}{1 - m} = \frac{1}{3}$,

解得 : $m = -\frac{10}{3}$ 或 1 (舍去 $m = 1$) ,

故点 D 的坐标为 $\left(-\frac{10}{3}, \frac{13}{9}\right)$.

(3) 过点 E 作 $EF \perp BC$, 交 BC 于点 F ,



则 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}EC$, $AE + \frac{\sqrt{2}}{2}EC = AE + EF$,

$\therefore$ 当 A 、 E 、 F 三点共线时, $AE + \frac{\sqrt{2}}{2}EC$ 最小, 即 $2AE + \sqrt{2}EC$ 最小,

设: 直线 AF 的表达式为: $y = x + b$,

将点 A 坐标 $(1, 0)$ 代入上式, $1 + b = 0$, 则 $b = -1$,

则直线 AE 的表达式为: $y = x - 1$, 则点 E 的坐标为 $(0, -1)$,

则 $EC = 3 - 1 = 2$, $AE = \sqrt{2}$.

$$2AE + \sqrt{2}EC = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题